**ВІДПОВІДІ**
**другого етапу Всеукраїнської олімпіади**
**Національного університету харчових технологій**
**з МАТЕМАТИКИ**
**2020**

**Кожне з завдань учасник повинен завершити словом «Відповідь» і записати відповідь, яку він отримав.**

**Завдання 1–3 мають по чотири варіанти відповіді (А–Г), з яких тільки ОДНА – ПРАВИЛЬНА. Завдання з вибором відповіді вважається виконаним правильно, якщо у полі «Відповідь» відповідного завдання записана тільки одна буква, якою позначена правильна відповідь. За кожну правильну відповідь на завдання 1–3 учасник отримує по 5 балів.**

1. Вказати формулу площі прямокутника.

А) $S=2\pi R$; Б) $S=ab$; В) $S=5\pi R^2$; Г) $S=\frac{1}{2}a^2$.

***Відповідь:*** **Б.**

2. Розв’язати нерівність $2x-1\geq x+7$.

А) $x\geq\frac{8}{3}$; Б) $x\geq 2$; В) $x\leq 6$; Г) $x\geq 8$.

***Відповідь:*** **Г.**

3. Обчислити без калькулятора $6^2+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-3{,}4$.

А) 0,4; Б) 18,5; В) 3; Г) 48,6.

**Відповідь: Г.**

**Завдання 4–10 повинні містити ПОВНЕ розв’язання задачі, яке підтверджує правильну відповідь. Завдання вважається розв’язаним і оцінюється вказаними для нього балами, якщо наведено повне правильне розв’язання, і записана правильна відповідь За кожне правильне розв’язання завдання 4–7 учасник отримує по 10 балів, за завдання 8–10 отримує по 15 балів.**

4. Розв’язати рівняння $\sqrt{x-3}=4$.

***Розв’язання.***

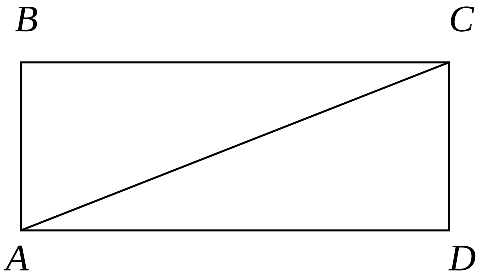
Оскільки права частина рівняння невід’ємна, піднесемо до квадрату обидві частини рівняння. Маємо

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2=4^2,$$
$$x-3=16,$$
$$x=19.$$

***Відповідь:*** 19 **.**

5. Знайти площу прямокутника, якщо його одна сторона дорівнює 4, а діагональ 5.

***Розв'язання.***



За умови $BC = 4$ од., $AC = 5$ од.. Оскільки $ABCD$ прямокутник, то $ABC$ прямокутний трикутник. За теоремою Піфгора маємо:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$. Звідки $AB^2 = AC^2 - BC^2$.

$AB^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, тоді $AB = 3$ од.

Знайдемо площу прямокутника за формулою: $S = AB \cdot BC$, маємо $S = 12$ од$^2$.

***Відповідь:*** 12 од$^2$.

6. Спросити вираз $(a+5)^2 - a^2 - 10a - 4$.

***Розв'язання.***

$(a+5)^2 - a^2 - 10a - 4 = a^2 + 10a + 25 - a^2 - 10a - 4 = 21.$

***Відповідь:*** 5.

7. Розв'язати нерівність $\log_2(6x-4) \ge \log_2(4x+3)$.

***Розв'язання.***

Відомо, що при $a > 1$ нерівність $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$ рівносильна системі:

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Отже, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 6x - 4 \ge 4x + 3; \\ 4x + 3 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \ge 7; \\ 4x > -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3{,}5; \\ x > -0{,}75; \end{cases} \Rightarrow x \ge 3{,}5.$$

Можна зауважити, що в даному

***Відповідь***: $x \in [3{,}5; +\infty)$.

8. Дано функцію $f(x) = x^5 + \cos 3x$. Знайти $f'(0)$.

***Розв'язання.***

Знайдемо похідну заданої функції. Відомо, що $(u+v)' = u' + v'$, тоді

$$f'(x) = \left(x^5 + \cos 3x\right)' = \left(x^5\right)' + \left(\cos 3x\right)' = 5x^4 - 3\sin 3x.$$

Тут ми скористалися правилом диференціювання складеної функції.

Знайдемо значення похідної функції при $x = 0$, маємо:

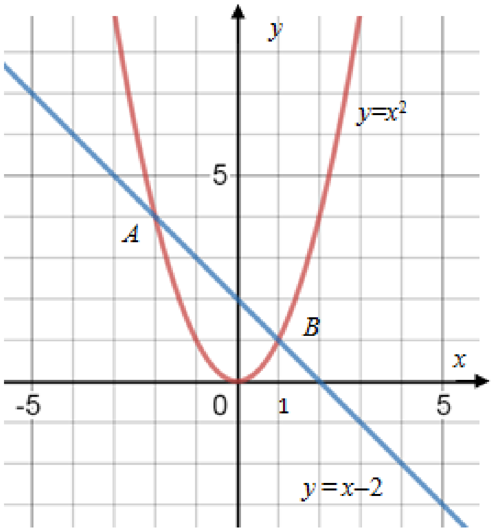
$$f'(0) = 5 \cdot 0^4 - 3\sin 0 = 0.$$

***Відповідь:*** 0.

9. Побудувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = 2 - x$. На рисунку позначити точки перетину графіків функцій. У відповіді вказати координати точок перетину графіків функцій.

***Розв'язання.***

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 2 - x$. Відомо, що $y = x^2$ - квадратична функція, графіком якої є парабола з вершиною в точці $(0;0)$. $y = 2 - x$ - лінійна функція, графіком якої є пряма, що проходить через точки $(0;2)$ та $(1;1)$.




З рисунка маємо точки перетину графіків: $A(-2;4)$ та $B(1;1)$.

***Відповідь:*** $(1;1)$ та $(-2;4)$.

10. Розв'язати рівняння $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

***Розв'язання.***

Позначимо $3^x = t,\ t \geq 0$, тоді $3^{2x} = \left(3^x\right)^2 = t^2$. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 4; \\ t_1 \cdot t_2 = 3; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3; \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$$

Повернемося до змінної $x$, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 3; \\ 3^x = 1; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^1; \\ 3^x = 3^0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 0. \end{array}\right.$$

***Відповідь:*** 0; 1**.**

Голова предметно-методичної комісії
Всеукраїнської олімпіади НУХТ з математики Ніколаєва О.А.